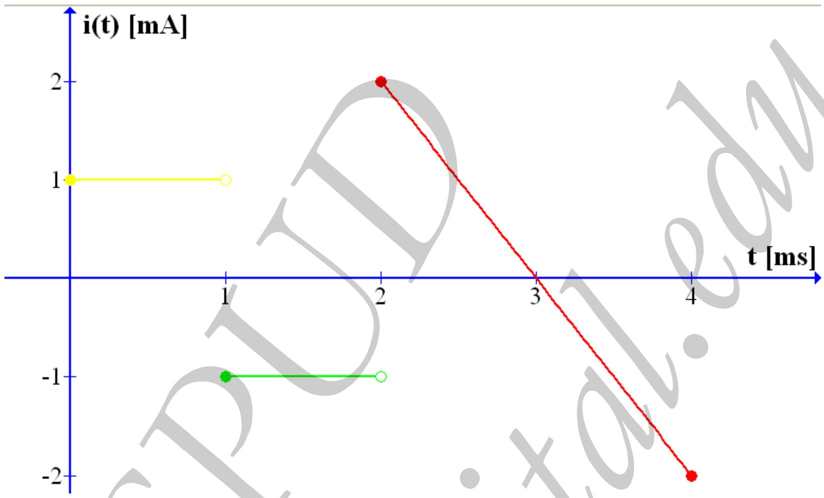
1.1 CARGA ELÉCTRICA

Ejercicio 1. Carga eléctrica.

Determinar analítica y gráficamente la carga en función del tiempo q(t), a partir de la curva de corriente$i(t)$.

Tenga en cuenta que $q(0_{ms}) = 0\ [C]$.

Gráfica 1. Corriente eléctrica en función del tiempo $i_{(t)}$.



Algoritmo de Solución

1. Determinar los intervalos de tiempo, presentes en la curva de corriente.

Para su distinción cada intervalo se muestra en un color.

Primer intervalo amarillo $0 \leq t < 1\ [ms]$

Segundo intervalo verde $1 \leq t < 2\ [ms]$

Tercer intervalo rojo $2 \leq t \leq 4\ [ms]$

2. Determinar la ecuación de corriente $i(t)$ para cada uno de los intervalos de la curva.

2.1 Ecuación de cada intervalo:

Primer intervalo $i(t) = 1\ [mA] 0 \leq t < 1\ [ms]$
Segundo intervalo $i(t) = -1\ [mA] 1 \leq t < 2\ [ms]$

Para el tercer intervalo es necesario determinar la pendiente y el punto de corte utilizando las formulas:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ó} \quad m = \frac{i(t_2) - i(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Y

$$y_{(x)} = mx + b \quad \text{ó} \quad i_{(t)} = mt + b$$

2.2 Observando la gráfica, las unidades de corriente $i(t)$y tiempo t, están en milésimas. Esto no es una camisa de fuerza, la ecuación del último intervalo la obtendremos utilizando unidades diferentes, de las siguientes tres formas:

A. Corriente expresada en [mA], y tiempo en [ms].
B. Corriente expresada en [mA], y tiempo en [s].
C. Corriente expresada en [A], y tiempo en [s].

2.2.1 Determinando la pendiente de la forma A (se conserva las unidades de la grafica):

- $m = \frac{i(t_2) - i(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{i_{(4ms)} - i_{(2ms)}}{4[ms] - 2[ms]} = \frac{-2[mA] - 2[mA]}{4[ms] - 2[ms]} = \frac{-4[mA]}{2[ms]} = -2\frac{[mA]}{[ms]}$

$$m = -2\frac{[mA]}{[ms]}$$

Ahora se determina el término independiente.

- $i_{(t)} = mt + b \Rightarrow i_{(4ms)} = -2\frac{[mA]}{[ms]} * 4[ms] + b = -2[mA]$

$$-8[mA] + b = -2[mA]$$

$$b = -2[mA] + 8[mA]$$

$$b = 6[mA]$$

La ecuación $i(t) = -2t + 6[mA],\ \ es\ valida\ para\ t\ expresados\ en\ [ms]$

2.2.2 Determinando la pendiente de la forma B (se maneja la corriente en miliamperios y el tiempo en segundos):

- $m = \frac{i(t_2) - i(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{i_{(4ms)} - i_{(2ms)}}{4*10^{-3}[s] - 2*10^{-3}[s]} = \frac{-2[mA] - 2[mA]}{4*10^{-3}[s] - 2*10^{-3}[s]}$

$$m = \frac{-4[mA]}{2*10^{-3}[s]} = -2*10^{3}\frac{[mA]}{[s]}$$

$$m = -2*10^{3}\frac{[mA]}{[s]}$$

Ahora se determina el término independiente.

- $i_{(t)} = mt + b \Rightarrow i_{(4*10^{-3}s)} = -2*10^{3}\frac{[mA]}{[s]} * 4*10^{-3}[s] + b = -2[mA]$

$$-8[mA] + b = -2[mA]$$

$$b = -2[mA] + 8[mA]$$

$$b = 6[mA]$$

La ecuación $i(t) = -2 * 10^3 t + 6[mA], es\ valida\ para\ t\ expresados\ en\ [s]$

2.2.3 Determinando la pendiente de la forma C (se maneja el tiempo en segundos y la corriente en amperios, se resuelve en unidades fundamentales):

- $m = \frac{i(t_2) - i(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{i_{(4ms)} - i_{(2ms)}}{4*10^{-3}[s] - 2*10^{-3}[s]} = \frac{-2*10^{-3}[A] - 2*10^{-3}[A]}{4*10^{-3}[s] - 2*10^{-3}[s]}$

$$m = \frac{-4 * 10^{-3}[A]}{2 * 10^{-3}[s]} = -2\frac{[A]}{[s]}$$

$$m = -2\frac{[A]}{[s]}$$

Ahora se determina el término independiente.

- $i_{(t)} = mt + b \Rightarrow i_{(4*10^{-3}s)} = -2\frac{[A]}{[s]} * 4 * 10^{-3}[s] + b = -2 * 10^{-3}[A]$

$$-8 * 10^{-3}[A] + b = -2 * 10^{-3}[A]$$

$$b = -2 * 10^{-3}[A] + 8 * 10^{-3}[A]$$

$$b = 6 * 10^{-3}[A]$$

La ecuación $i(t) = -2t + 6 * 10^{-3}[A], es\ valida\ para\ t\ expresados\ en\ [s]$

Para comprobar que las 3 ecuaciones son equivalentes se toma un punto del intervalo y evaluamos en las tres formas:

Forma A. $i_{(4ms)} = -2\frac{[mA]}{[ms]} * 4[ms] + 6[mA] = -8[mA] + 6[mA] = -2[mA]$

Forma B. $i_{(4ms)} = i_{(4*10^{-3}\ s)} = -2 * 10^3 \frac{[mA]}{[s]} * 4 * 10^{-3}[s] + 6[mA]$

$$i_{(4*10^{-3}\ s)} = -8[mA] + 6[mA] = -2[mA]$$

Forma C. $i_{(4ms)} = i_{(4*10^{-3}\ s)} = -2\frac{[A]}{[s]} * 4 * 10^{-3}[s] + 6 * 10^{-3}[A]$

$$i_{(4*10^{-3}\ s)} = -8 * 10^{-3}[A] + 6 * 10^{-3}[A] = -2 * 10^{-3}[A]$$

Se obtienen tres respuestas iguales, a partir de tres ecuaciones equivalentes.
Se continuará el desarrollo del ejercicio. Con la forma A. (se conservan las unidades de la gráfica).

$$i(t) = -2t + 6[mA] \qquad\qquad 2 \le t \le 4\ [ms]$$

3. Ahora a partir de la expresión:

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i(t)\,dt + q_{(t_0)}$$

La carga inicial del circuito $q_{(t_0)} = q_{(0ms)} = 0[C]$

$q_{(t)} = \int_{0[ms]}^{t} i(t)\,dt + q_{(0ms)}$

3.1 Primer intervalo. $q_{(t)} = \int_{0[ms]}^{t} 1[mA]dt + q_{(0)}$

$$q_{(t)} = 1\,[mA]t \,\Big|_{0[ms]}^{t} + 0[C]$$

$$q_{(t)} = 1[mA] * t[ms] - 1[mA] * 0[ms]$$

$$q_{(t)=}\ 1\,t\,[\mu C]\ 0 \le t \le 1[ms] \quad para\ t\ expresado\ en\ [ms]$$

3.2 Segundo intervalo. Primero se determina la condición inicial $q_{(1ms)}$

$$q_{(t)} = 1t[\mu C] \qquad para\ t\ expresado\ en\ [ms]$$

$$q_{(1ms)} = 1\,.\,(1)[\mu C] = 1[\mu C]$$

$$q_{(t)} = \int_{1[ms]}^{t} i(t)\,dt + q_{(1ms)}$$

$$q_{(t)} = -\int_{1[ms]}^{t} 1[mA]\,dt + q_{(1ms)} \Rightarrow q_{(t)=} - 1[mA]t \,\Big|_{1[ms]}^{t} +1\,[\mu C]$$

$$q_{(t)} = -1[mA] * t[ms] - (-1[mA] * 1[ms]) + 1[\mu C]$$

$$q_{(t)} = -1t[\mu C] + 1[\mu C] + 1[\mu C]$$

$$q_{(t)} = -1t + 2[\mu C] \qquad 1 \le t \le 2[ms] \quad para\ t\ expresado\ en\ [ms]$$

3.3 Tercer intervalo. Primero se determina la condición inicial $q_{(2ms)}$

$$q_{(t)} = -1t + 2[\mu C] \quad para\ t\ expresado\ en\ [ms]$$

$$q_{(2ms)} = -1[\mu C] * (2) + 2[\mu C] = 0[C]$$

$$q_{(t)} = \int_{2[ms]}^{t} i(t)\,dt + q_{(2ms)}$$

$$q_{(t)} = \int_{2[ms]}^{t} (-2t + 6\,[mA])dt + 0 \Rightarrow q_{(t)} = -\int_{2[ms]}^{t} 2\,t[mA]\,dt + \int_{2[ms]}^{t} 6\,[mA]dt$$

$$q_{(t)} = \frac{-2}{2} t^2\,[mA] \Big|_{2[ms]}^{t} + 6\,t[mA] \Big|_{2[ms]}^{t}$$

$$q_{(t)} = -1t^2[mA] * [ms] - (-1\,(2)^2[mA] * [ms]) + 6t[mA] * [ms] - 6(2)[mA] * [ms]$$

$$q_{(t)} = -1t^2[\mu C] + 4[\mu C] + 6t[\mu C] - 12[\mu C]$$

$$q_{(t)} = -t^2 + 6t - 8\,[\mu C] 2 \le t \le 4[ms] \qquad para\ t\ expresado\ en\ [ms]$$

Gráfica 2.Carga eléctrica en función del tiempo$q_{(t)}$.